

# Geomatikk 1 oppsummering

Alexander Nossun  
I-IKT  
alexanno@stud.ntnu.no  
41293632

1. desember 2006

## **Sammendrag**

En oppsummering av faget geomatikk 1 høst 2006. Dette dokumentet er lagd i forbindelse med eksamensforberedelser høsten 2006 og er *kun* ment for min personlige læring. Det er også tilpasset eksamensstilen til spesielle faglærere. I det store og hele deles dette dokumentet “as is” og kommer uten noen form for garanti. Jeg håper uansett det er til nytte for de som leser dette og har skrevet dette i god tro.

## Innhold

<b>1</b>	<b>Fotogrammetri</b>	<b>3</b>
1.1	Begreper og tips . . . . .	3
1.2	Orienteringer . . . . .	3
1.2.1	Indre-orientering . . . . .	3
1.2.2	Relativ-orientering . . . . .	4
1.2.3	Absolutt orientering . . . . .	4
1.2.4	Ytre-orientering? . . . . .	4
1.3	Fotografi vs. topografisk kart . . . . .	4
1.3.1	Radiell forskyvning . . . . .	4
<b>2</b>	<b>Fjernmåling</b>	<b>6</b>
2.1	Klassifiseringsnøkler . . . . .	6
2.2	Metoder for klassifisering . . . . .	6
2.3	Bildeforbedring . . . . .	8
<b>3</b>	<b>Geodesi</b>	<b>8</b>
3.1	Begreper og tips . . . . .	8
3.1.1	Frihetsgrader . . . . .	9
3.2	Standardavvik og korrelasjon . . . . .	9
3.2.1	Aritmetisk middel . . . . .	9
3.2.2	Veid middel . . . . .	10
3.2.3	Vektsenhet . . . . .	10
3.3	Retningsvinkelen . . . . .	10
3.4	Feilligninger . . . . .	11
3.5	Normalligningene . . . . .	12
3.6	Feilforplantningsloven . . . . .	13

# 1 Fotogrammetri

## 1.1 Begreper og tips

**Stereosyn** er fenomenet ved å se romlig. Det finnes to forskjellige typer stereosyn, *direkte* og *indirekte*. Direkte stereosyn er når man naturlig ser romlig *uten* hjelpemidler. Mennesker med to øyne ser i direkte stereo når vi ser på et tredimensjonalt objekt. Indirekte stereosyn er når vi oppnår en romlig følelse av noe som ikke er romlig, som for eksempel et stereopar av bilder. For indirekte stereosyn må vi se på forskjellige bilder med hvert øye. Dette har vi forskjellige hjelpemidler til, som stereoskoper og stereoinstrument. Felles for disse er at de tvinger hvert øye til å se på forskjellige bilder. Av stereoskop har vi *lommestereoskop* og *speilstereoskop*, stereoinstrument kan defineres som en egen klasse.

**Det** er mye “lureri” på tidligere eksamener. Det er ikke alltid man trenger å bruke alle verdiene som er oppgitt og av og til ikke lurt. Benevninger gis i alle tenkelige format, pass på!

**Bildemålestokk** er skaleringsfaktoren mellom bilde og den virkelige verden. Målestokken som er oppgitt på bildet er bare en planlagt målestokk, og er ikke helt korrekt. Bildemålestokken forandres dessuten rundt om i bildet. Det hersker litt forvirring med målestokktallet, enten oppgis det som 1 : 6000 eller bare som 6000, prøv og feil fungerer greit og generelt er 6000 greiest å bruke. Bildemålestokken kan finnes hvis man vet en avstand på bilde  $d$  og den samme avstanden i den virkelige verden  $D$ , en kan da bruke

$$m_b = \frac{D}{d}$$

pass på riktige benevninger/enheter!

## 1.2 Orienteringer

Orientering er nødvendig primært for å kunne oppnå *indirekte* stereosyn, men er også med på å danne forskjellige koordinatsystem på bildene.

### 1.2.1 Indre-orientering

**Indre-orientering** er første steg for orientering av bilder i en stereoinstrument. I stereoinstrumentet bruker vi rammemerkene på bildene til indre-orientering. Størrelsen på bildene og parametre fra kalibreringsrapport er lagt inn i instrumentet. Ut ifra dette regner instrumentet ut transformasjonsparametre for å finne *bildekoordinater* og dermed et *bildekoordinatsystem*.

### 1.2.2 Relativ-orientering

**Relativ-orientering** må gjøres etter indre-orientering og er primært for å orientere bildene riktig i forhold til hverandre. Gangen er å finne punkter i begge bildene og legge bildene slik at disse punktene sammenfaller til ett. Det er vanlig å bruke 6 ferdigdefinerte punkter til dette kalt *von Gruber-punkter*. Først finner man et punkt som er godt synlig i begge bildene, deretter “sikter” man med det ene øye, altså plasserer det ene bildet riktig. Så plasserer man kun det andre bildet til å passe med punktet. Når dette er gjort for et passelig antall punkter (5) skal man ha oppnådd fullt stereosyn. Teoretisk skal parallaksen være lik 0 når relativ-orientering er utført, dette skjer aldri, men man oppnår mikro-millimeter nøyaktighet, som er mer enn godt nok. Når relativ-orientering er ferdig har begge bildene et likt bildekoordinatsystem og man kan navigere i stereo.

### 1.2.3 Absolutt orientering

**Absolutt-orientering** fører til at vi får plassert stereobildet i den virkelige verdens koordinatsystem. Det vil si at vi finner transformasjonsformler fra *bildekoordinatsystemet* til *virkelig-koordinatsystemet*. Dette er nødvendig for å kunne tegne opp kart over “ukjente” områder i stereobildet. For å gjennomføre dette må vi ha noen kjentpunkter som vi vet virkelige koordinater på og cirkaplassering i stereobildet. Vi finner punktene i stereobildet og sier ifra hvilke koordinater punktet har, etter to punkter kan instrumentet regne ut en nokså god plassering i XY-planet etter tredje/fjerde punktet har vi fått en brukbar transformasjon til XYZ-rommet. Transformasjonsformlene blir bedre jo flere gode punkt man legger inn. Det er et poeng å ta *godt spredte* punkt for å forbedre transformasjonen. En analogi til dette er å vippe et ark på nåler, med nåler godt spredt over arket klarer man å balansere det bedre enn med nåler konsentrert rundt et snevert område.

### 1.2.4 Ytre-orientering?

samme som absolutt-orientering?

## 1.3 Fotografi vs. topografisk kart

### 1.3.1 Radiell forskyvning

**Radiell forskyvning** er et fenomen som oppstår ved fotografering. Elementer som ligger over eller under normalflaten blir projisert ned i to dimensjoner, men ikke på en ren-matematisk måte. Når fotografiet ikke er normalt på objektet vil høyden på objektet bli projisert i bildet. Så som en høyblokk vil ligge utover fra sentrum av bildet - vi ser etasjene i det todimensjonale bildet. Som vist i figur

figur 1. Matematisk ville en høyblokk normalt blitt projisert som et rektangel, dette oppnår vi når fotografiet er tatt *normalt* på objektet. Dette er i store trekk den største forskjellen mellom fotografi og topografisk kart.

**Matematisk** kan vi utlede formler for dette fenomenet. Ved hjelp av disse kan vi finne høyder slik de er i virkeligheten. Figur 1 er veldig lur å huske. Ved hjelp av trekantanalyse, primært formlighet, kan vi lett finne forskjellige sammenhenger. Det er også viktig å huske sammenhengen

$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta R}{R}$$

og

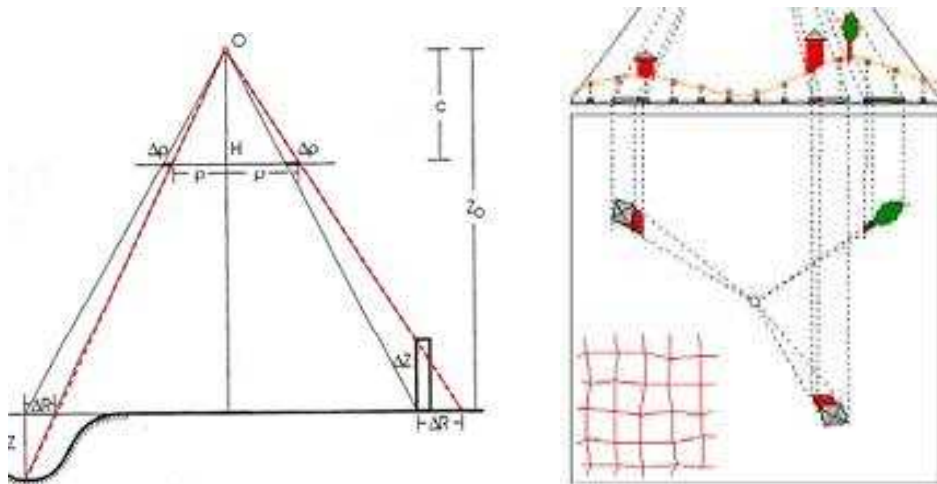
$$Z_0 = c * m_b$$

der  $m_b$  er målestokkstallet fks. 6000. Fra dette får vi sammenhengene

$$\frac{\Delta R}{\Delta Z} = \frac{R}{Z_0} \Rightarrow \frac{\Delta Z}{Z_0} = \frac{\Delta R}{R_0} = \frac{\Delta \rho}{\rho}$$

$$\Delta \rho = \Delta Z_0 * \frac{\rho}{c * m_b}$$

$$\Delta Z = \Delta \rho * \frac{Z_0}{\rho}$$



Figur 1: Radiell forskyvning, utledningsfigur og projisering

## 2 Fjernmåling

### 2.1 Klassifiseringsnøkler

Det er to metoder for å finne klassifiseringsnøkler, *supervised* og *unsupervised*. Klassifiseringsnøkler er et dårlig ord på identifikator. I praksis kan det sees på som en id til en klasse.

**Supervised** betyr i praksis at man må “hjelp” datamaskinen i å klassifisere klasser (temaer) før den kan klassifisere resten av settet. Fordelen ved en slik prosedyre er at vi selv bestemmer hvilke data som skal brukes for å klassifisere resten av settet. Vi bestemmer også hvor mange klasser vi ønsker å ha med. For eksempel kan vi ønske å putte alt av kornsorter i én klasse selv om de i utgangspunktet har vidt forskjellige måleverdier. Baksiden er at vi må gjøre en god del forarbeid manuelt som består i ren manuell klassifisering av relativt store mengder data. Vi drar heller ikke nytten av at datamaskinen kan finne klasser vi har oversett.

**Unsupervised** er at datamaskinen selv klassifiserer klasser av temaer. Dette kan gjøres på mange måter men i det store og det hele går det ut på å finne sammenhenger og likheter i datasettet for å putte de med likheter i én klasse. Fordelene ved *unsupervised* prosedyre er at datamaskinen kan finne klasser som vi manuelt har oversett. Baksiden er at en datamaskin i utgangspunktet er dum og følger regler strengt. Dette medfører at klassifiseringen kan bli opplagt feil. For eksempel hvis det kreves en analytisk tolkning av data. Det kan også oppstå uønsket mange klasser i forhold til hva vi manuelt ville ha valgt.

**Hybrid** av de to metodene er fullt mulig, og kanskje den beste løsningen. Metoden kan da bestå i at vi manuelt klassifiserer de klassene vi vil ha med, men med “lite” data og lar datamaskinen foreslå flere eller sammenslåing av klasser.

### 2.2 Metoder for klassifisering

Det finnes mange ulike algoritmer for klassifisering, blant de vanligste er *minste avstand til middel*, *parallellepiped* og *maximum likelihood*. Alle disse baserer seg mer eller mindre på et scatterdiagram som er en grafisk framvisning av datasettet.

**Scatterdiagram** er et grafisk plot av datasettet og kan vanskelig vises i noe mer enn tre dimensjoner og er enklest å se for seg i to dimensjoner. Det går ut på å sette aksene til de av båndene man har data fra og vil analysere og deretter se sammenhenger. Som å se på målingene som koordinater og plote de i et aksekors,

vanligvis med positive verdier. Etter hvert vil det danne seg punktskyer som kan klassifiseres ut i fra forskjellige algoritmer.

**Minste avstand til middel** går i hovedsak ut på å finne gjennomsnittet av verdiene til hver klasse i datasettet. Ut i fra dette kan man finne minste avstand til et nytt uklassifisert punkt. Den avstanden som er minst til en av klassene “vinner” og punktet blir tilhørende denne klassen. Dette kan man så gjøre rekursivt for hvert nye punkt, eller man kan la vær og beholde det originale gjennomsnittet.

**Parallelepiped** består i å omkranse “punktskyen” til en klasse med et litt avansert rektangel. Den enkleste formen er et rett fram rektangel. Naturlig nok blir metoden bedre jo mer komplekst parallelepipedet blir. Når man har dannet rektanglene til alle klassene kan man klassifisere ett nytt punkt. Hvis punktet havner innenfor rektangelet til en klasse tilhører punktet denne klassen. Problemer oppstår lett ved for eksempel at to rektangler overlapper hverandre. Da er en løsning å bruke en annen metode, for eksempel minste avstand til middel 2.2, eller rett å slett lage en regel som man følger konsekvent med påfølgende dårlige klassifiseringer.

**Maximum likelihood** er den mest matematiske metoden og går ut på å lage sannsynlighetsvektorer ut i fra gjennomsnittspunktet i punktskyen. Dette kan sees på som sirkler eller år-ringer med “dårligere” verdi jo større radien blir. Det vil i praksis si at et nytt punkt i som havner i den ytterste sirkelen har liten til ingen sannsynlighet for å tilhøre klassen som sirkelen tilhører. Mer komplekst kan man se på sirklene som et kontinuerlig tredimensjonalt plan hvor verdien i sentrum er best og synkende jo lenger vekk man kommer. Dette fører til at alle verdier mulig i datasettet kan bli klassifisert uten problemer, men med sviktende kvalitet. “Sannsynlighetsplanene” til de forskjellige klassene vil overlappe hverandre men som regel vil alltid en av klassene “vinne” med en bedre “verdi” på planet sitt. Den mest belastende baksiden ved metoden er at den krever statistisk normalfordeling av data inkludert i settet. Dette kan omgås ved å dele opp data til det blir normalfordelt.

**Klassifisering** med en kombinasjon av de nevnte metodene vil være å foretrekke men krever nokså kraftig beregningskapasitet og egner seg veldig bra for datamaskiner men svært dårlig for manuell virksomhet. Med en eksentrisk og kompleks nok blanding av de nevnte metodene vil man antakeligvis kunne klare å knekke en moderne arbeidsstasjon siden datasettene er store. Uten å ha inngående kunnskap om dette.

## 2.3 Bildeforbedring

Fotografier har som oftest mye “støy” i seg som ikke er hensiktsmessig for analysing. For eksempel kan en fjord se litt “grumsete” ut fordi det er bølger, refleks eller lignende. Det er jo utelukkende en fjord, men vanskelig å analysere, spesielt for en datamaskin. Derfor er det hensiktsmessig å fjerne og/eller framheve visse elementer i et bilde. Det er veldig mange metoder for å forbedre bilde på, to av de er *filter* og *kontraststrekking*.

**Filtertechnikken** består essensielt av å ta vekk eller framheve frekvenser i et bilde. Et enkelt filter er å ta vekk alle frekvenser som ligger i det synlige røde område. Dette vil resultere i et bilde uten noen rødfarger. For et vanlig fotografi vil dette bety en overvekt av grønn og blå farge. For mer spesifikke filtre kan man se på frekvenshistogrammer og finne ut hva som er utslagsgivende, for eksempel kan man se at det er mye opp og ned i frekvenser i et område som man tror er vann. Da kan filteret gjøre om alle disse frekvensene til for eksempel kongeblå farge, som et ekstremt eksempel. Vanligvis vil man kanskje fjerne de frekvensene eller bytte de ut med en entydig frekvens.

**Kontraststrekking** er en metode for å gjøre kontraster mer ekstreme. I praksis vil det si å “strekke” alle frekvensene som inngår i bildet til å spre seg over hele det definerte frekvensområde. Det er flere algoritmer for denne “strekkingen”. *Lineær strekking* og *histogram strekking* er vanlige.

**Lineær strekking** består i å lineært skalere opp eller ned verdiene med en predefinert faktor slik at de vil spre seg utover hele frekvensområde.

**Histogram strekking** kan sees på som en “veid” strekking. Man kan da se på det originale frekvenshistogrammet og ut i fra tetthet til frekvenser skalere de opp eller ned slik at de sprer seg **jevnt** utover frekvensområde.

## 3 Geodesi

### 3.1 Begreper og tips

**Benevninger** er vrient å holde styr på i Geodesi! Det brukes *gon* istedenfor radianer. Det brukes ofte standardavvik på *milli-nøyaktighet*, en kovarians/variansmatrise kan inneholde *begge benevninger* og disse er i *kvadrat*, fks.  $mgon^2$ ! Gjør benevnings-/enhetsanalyse ved matrisemultiplikasjon, det er lett og raskt og finner



feil lett! Omforming fra milligon (mgon) til radianer gjøres ved å skaléere med

$$\frac{\pi}{200000}$$

ofte er benevningen i  $mgon^2$  da skaléres det med

$$\left(\frac{\pi}{200000}\right)^2$$

### 3.1.1 Frihetsgrader

**Frihetsgrader** ,  $f$  er bedre forklart *overskytende målinger*. Som er en rask analyse av estimeringsproblemet. Vi definerer  $e$  som antall ukjente og  $n$  som antall observasjoner. Hvis vi måler 3 vektorer med  $(X, Y, Z)$  som måleverdier og oppgaven består i å finne  $(X, Y, Z)$  til et ukjent punkt vil dette medføre

$$f = n - e$$

$$f = 3 * 3 - 3 = 6$$

der  $n = 3 * 3$  og  $e = 3$  siden vi har målt  $X, Y, Z$  for 3 vektorer og vi har 3 ukjente i systemet. Ut i fra dette får vi overbestemmelse av de ukjente og antall frihetsgrader lik 6. MERK at frihetsgrader betegnes med  $f$  som er det samme som elementene i  $F$ -matrisen i feilligningen (3.4) disse er *ikke* de samme!

## 3.2 Standardavvik og korrelasjon

### 3.2.1 Aritmetisk middel

**Aritmetisk middel** er i bunn og grunn et helt vanlig gjennomsnitt. Her er det

$$\bar{x} = \hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^n l_i}{n}$$

som gjelder. Der  $l_i$  er den observerte verdien (måleverdien). Vi kan da forenkle utregningen av standardavviket til

$$\hat{\sigma}_x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

der  $\sigma = S$  ofte er oppgitt som en standardavvik på måleutstyrer.

**Regnekontroll** kan utføres ved å sjekke

$$\sum_{i=1}^n \hat{v}_i = 0$$

der  $\hat{v}$  er den estimerte feilen vi gjør i estimeringen av  $x$ .

### 3.2.2 Veid middel

**Veid middel** er som aritmetisk middel (3.2.1) men at man vekter de forskjellige observerte verdiene,  $l_i$ -ene, med en vekt  $p_i$ . Da får man et estimat ut i fra sammenhengen

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^n p_i * l_i}{\sum_{i=1}^n p_i}$$

som støtter forskjellige vekter på de forskjellige observasjonene.

**Standardavviket**  $\sigma_{\hat{x}}$ , til den estimerte verdien  $\hat{x}$  får vi av formelen

$$\hat{S}_{\hat{x}} = \hat{\sigma}_{\hat{x}} = \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{\sum_{i=1}^n p_i}}$$

hvor

$$\sigma_0 = \sqrt{\frac{\sum_{i=0}^n p_i * \hat{v}_i * \hat{v}_i}{n - 1}}$$

som samlet blir

$$\hat{\sigma}_{\hat{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n p_i * \hat{v}_i * \hat{v}_i}{n - 1 * \sum_{i=1}^n p_i}}$$

**Regnekontroll** kan utføres ved “regelen”

$$\sum_{i=1}^n p_i * \hat{v}_i = 0$$

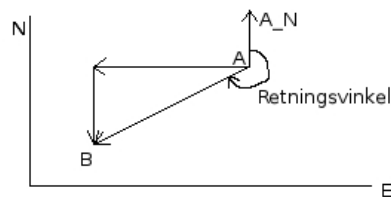
der  $\hat{v}$  er den estimerte feilen vi gjør i estimeringen av  $x$ .

### 3.2.3 Vektsenhet

**Vektsenheten** er den måleverdien vi velger som  $i = 0$  som igjen har standardavviket  $\sigma_0$  og vekten  $p_0 = 1$ . Detaljerte formler for valg av vekter under normal-ligninger (3.5).

## 3.3 Retningsvinkelen

**Retningsvinkelen** er vinkelen mellom nord-komponenten til begynnelsepunktet, med klokken, til den vektoren som dannes av fra- og til-punktene. Retningsvinkelen betegnes ofte som  $\phi_{fra-til}$ . Figur 2 gir eksempel og grafisk beskrivelse denne figuren er veldig lurt å huske med tanke på utledning av formler!



Figur 2: Retningsvinkel, grafisk representert

**Matematisk** kan retningsvinkelen  $\phi_{A-B}$  uttrykkes som

$$\phi_{A-B} = \arctan \left( \frac{Y_B - Y_A}{X_B - X_A} \right)$$

der  $X_*$  og  $Y_*$  er X- og Y-koordinatene til de forskjellige punktene og resultat i gon.

**Vanligvis** er  $X = \text{North}$  og  $Y = \text{East}$ ! MERK også at det er  $B$  minus  $A$  sine koordinater! Her er det også *svært* lett å falle i tangensgruven. Det er spesielle regler for når det er pluss og minus 200 gon eller 400 gon disse baserer seg på hvilket fortegn  $Y_B - Y_A$  og  $X_B - X_A$  har.

### 3.4 Feilligninger

**Feilligninger** er ligninger som estimerer feilen vi gjør i en beregning. Generelt er feilligningene på formen

$$\mathbf{V} = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{F}$$

der  $\mathbf{V}$ ,  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{X}$  og  $\mathbf{F}$  er matriser.  $\mathbf{A}$ -matrisen kommer fra den matematiske sammenhengen som de ukjente i  $\mathbf{X}$  har.  $\mathbf{X}$  er de ukjente.  $\mathbf{F}$  er korreksjonen vi gjør i beregningen, vanligvis er  $\mathbf{F}$  på den generelle formen

$$f = x_{\text{observert}} - x_{\text{forelopig}} + \Delta x_{\text{observert}}$$

der  $x_{\text{forelopig}}$  er en valgt foreløpig verdi, ofte referert til som  $X^0$ .  $x_{\text{observert}}$  er kalt den *observerte* verdien og får som regel notasjonen  $l_i$ .

**Den matematiske sammenhengen** finner vi ut i fra hvordan problemet vårt er definert. Vi “ser” denne sammenhengen som oftest ved hjelp av geometriske betraktninger. Sammenhengen kan ofte være vrien å se og krever erfaring. Alle oppgitte verdier bør brukes i en matematisk sammenheng, siden resultatet da vil bli avhengig av alle verdiene.

**A-matrisen** kalles *koeffisientmatrisen* og sier hvor mange ukjente som skal *inngå* i ligningen, hvor de skal *plasseres* og med hvilket *fortegn*. For oppsett av **A**-matrisen gjelder det først og fremst å ha god oversikt over hva vi regner på. Dernest er det nødvendig å holde tunga i rett munn siden sammenhengen kommer fram når man multipliserer med **X**-matrisen. **A**-matrisen inneholder ofte  $\pm 1$  eller 0 altså koeffisientene til den matematiske sammenhengen. Det er lurt å først sette opp **X**-matrisen, deretter fylle inn **A**-matrisen.

**Feilligningene** må lineariseres hvis de er av høyere grad. For eksempel hvis den matematiske sammenhengen (3.4) består av Pytagoras formel for trekanter. Metoden for dette er å partiellderivere **A**-matrisen.

$$P = \begin{bmatrix} \frac{\delta F_1}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta F_1}{\delta x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\delta F_n}{\delta x_1} & \dots & \frac{\delta F_n}{\delta x_n} \end{bmatrix}$$

### 3.5 Normalligningene

**Normalligningene** brukes for å finne **X**-matrisen. Normalligningene utledes fra feilligningene (3.4) men det inngår i tillegg en *vektmatrise* kalt **P**. Vektmatrisen **P** kan finnes på forskjellige måter. En vanlig metode er å ta utgangspunkt i standardavvikene til målingene. Da brukes sammenhengen

$$\frac{\sigma_i}{p_i} = \frac{\sigma_{i+1}}{p_{i+1}}$$

hvor man velger en “startmåling” og setter en vekt på denne. Deretter er det bare å iterere seg nedover for å finne vektene til alle målingene. Forutsatt at man har standardavvikene  $\sigma_i$ . **P**-matrisen er kvadratisk med rader lik antall feilligninger. Se ellers kompendiet (Skogseth/Holsen 2006) for flere måter å finne vekter på.

**Normalligningene** løst ut for **X** er på den generelle formen

$$X = (A^T P A)^{-1} * (A^T P F)$$

som ofte er forkortet med  $N = A^T P A$

$$X = (N)^{-1} * (A^T P F)$$

Man kan enten bruke matriseoperasjoner eller Gauss-eliminering. Men ligningssystemet er som oftest rimelig komplisert å løse for hånd.

**Standardavvikene** på de estimerte verdiene kan finnes ut i fra sammenhengen

$$\Sigma_{\hat{x}\hat{x}} = \hat{\sigma}_0 * Q_{\hat{x}\hat{x}}$$

som gir oss varians-/kovarians-matrisen. Denne sammenhengen kan selvfølgelig brukes på enkeltelementene i matrisen - som gir oss enkeltvarianser. MERK at det er *varianser*,  $\sigma^2$ , som er på diagonalen, mens det er rene *kovarianser*,  $\sigma_{12}$  utenfor diagonalen. Oftest er  $Q$ -matrisen oppgitt (symmetrisk om diagonalen) og  $\sigma_0$  oppgitt som standardavvik på måleutstyr eller lignende.

### 3.6 Feilforplantningsloven

**Feilforplantningsloven** går ut på å finne standardavvik på de opprinnelige måleverdiene.  $X$ 'ene som vi regnte ut ved hjelp av normalligningene (3.5) er egentlig de *transformerte* måleverdiene som for eksempel koordinater. Mens de opprinnelige måleverdiene kan for eksempel være retningsvinkel og lignende. Generelt finner vi en matrise med varianser til de opprinnelige måleverdiene. Formelen for dette kommer fra

$$Q_{YY} = A * Q_{XX} * A^T$$

der  $Q$  er varians-/kovariansmatrisen. Som videre blir

$$\Sigma_{YY} = A * \Sigma_{XX} * A^T$$

**Resultatet** vi får ut er en *varians-/kovariansmatrise*. Som betyr at standardavvikene er *opphøyet i 2.*, vi må derfor ta kvadratrotten av de aktuelle verdiene for å finne standardavvik.

**Generelt** er varians-/kovariansmatriser på formen

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22}^2 \end{bmatrix}$$

der  $\sigma_{21} = \sigma_{12}$  som vil si at den generelt er symmetrisk om diagonalen og kvadratisk. MERK at det er *variansen* som er på diagonalen *ikke* standardavvikene, husk  $\sqrt{\sigma^2}$ . Utenfor diagonalen er kovariansen mellom de respektive elementene. Det virker som det ofte er spørsmål om å finne standardavvikene til de opprinnelige måleverdiene. Ofte er dette forkledd som;  *finn standardavviket til retningsvinkelen målt i punkt 1 til punkt 3.*

## Referanser

Skogseth/Holsen: 2006, *Matematisk Statistikk (Feilteori) og Estimering*, BAT.